Uma Breve Introdução à Teoria de Singularidades

Nivaldo Grulha
(ICMC - USP)

3rdYRS 2024

"Singularidades estão por todo o lugar. Sem singularidades, você não pode falar sobre formas. Quando você escreve uma assinatura, se não houver nenhum cruzamento, nenhuma ponta aguda, é apenas um rabisco, não faz uma assinatura. Muitos fenômenos são interessantes, ou às vezes desastrosos, porque têm singularidades. Uma singularidade pode ser um cruzamento ou algo mudando repentinamente de direção. Existem muitas coisas assim no mundo, e é por isso que o mundo é interessante. Caso contrário, seria completamente plano. Se tudo fosse suave, não haveria romances ou filmes. O mundo é interessante por causa das singularidades." (H. Hironaka)

Figura: Heisuke Hironaka

Singularidades...

A Teoria de Singularidades é um ramo da Matemática que estuda fenômenos "não suaves". Embora geralmente classificada como uma subárea da Geometria/Topologia, a Teoria de Singularidades permeia todas as áreas da Matemática, promovendo importantes contribuições em diferentes cenários.

Embora seja geralmente classificada como uma subárea da Geometria/Topologia, a Teoria de Singularidades é aplicável em várias áreas da Matemática, como Geometria Algébrica, Topologia Algébrica, Geometria Diferencial, Teoria Qualitativa de Equações Diferenciais Ordinárias e Teoria dos Nós, entre outras, promovendo importantes contribuições em diferentes cenários.

Pontos Singulares...

No curso de cálculo I, vemos que se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função diferenciável podemos estudar seu comportamento através de informações obtidas a partir de seus pontos críticos.

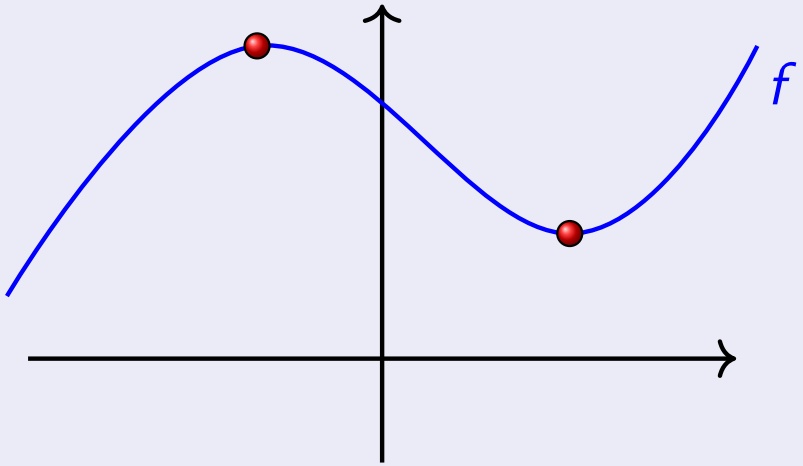


Figura: Pontos críticos de uma função f

Os pontos críticos, definidos como sendo os $x \in Dom(f)$ tais que $f'(x) = 0$, detectam as mudanças de comportamento da função.

No caso do estudo de superfícies singulares, a primeira superfície singular que as alunas e alunos de graduação vão encontrar, logo no primeiro semestre,

No caso do estudo de superfícies singulares, a primeira superfície singular que as alunas e alunos de graduação vão encontrar, logo no primeiro semestre,é o cone.

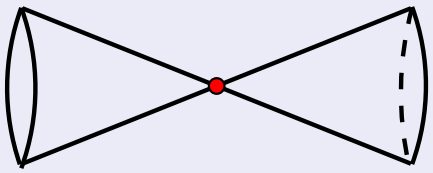


Figura: O cone.

Superfície mais do que conhecida dos alunos de Geometria Analítica. Mesmo sem formalizar o conceito de superfície singular o apelo geométrico do cone já deixa claro que há algo especial em seu vértice.

Podemos pensar no caso da curva plana real determinada pela equação $y = x^2$. Quando traçamos esta curva, observamos que ela é contínua, suave, sem nenhum ponto estranho.

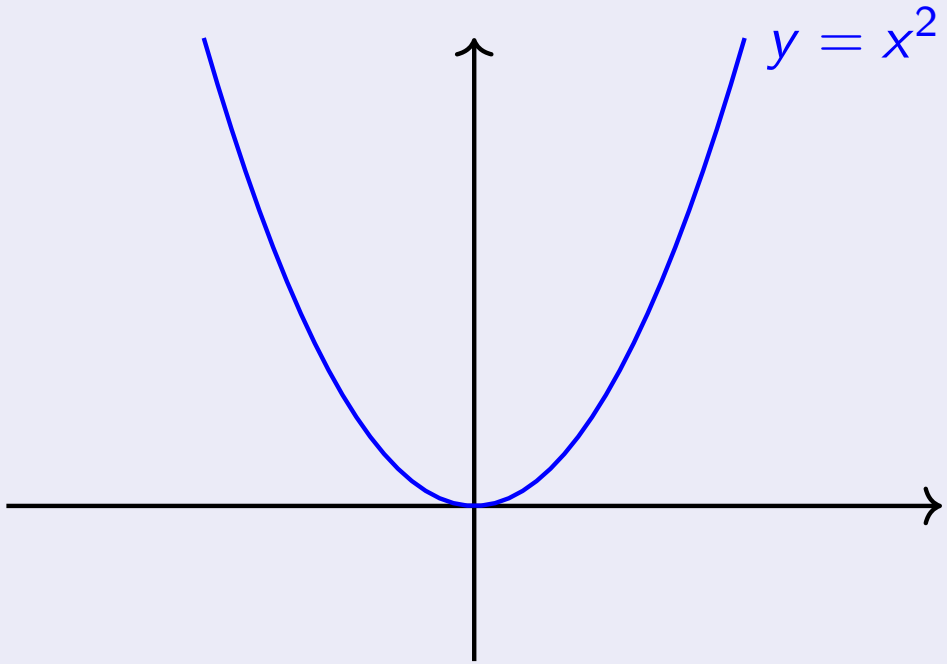


Figura: O traço de $y = x^2$.

No entanto, se traçarmos a curva correspondente à equação $y^3 = x^2$, obteremos uma curva com um ponto especial na origem.

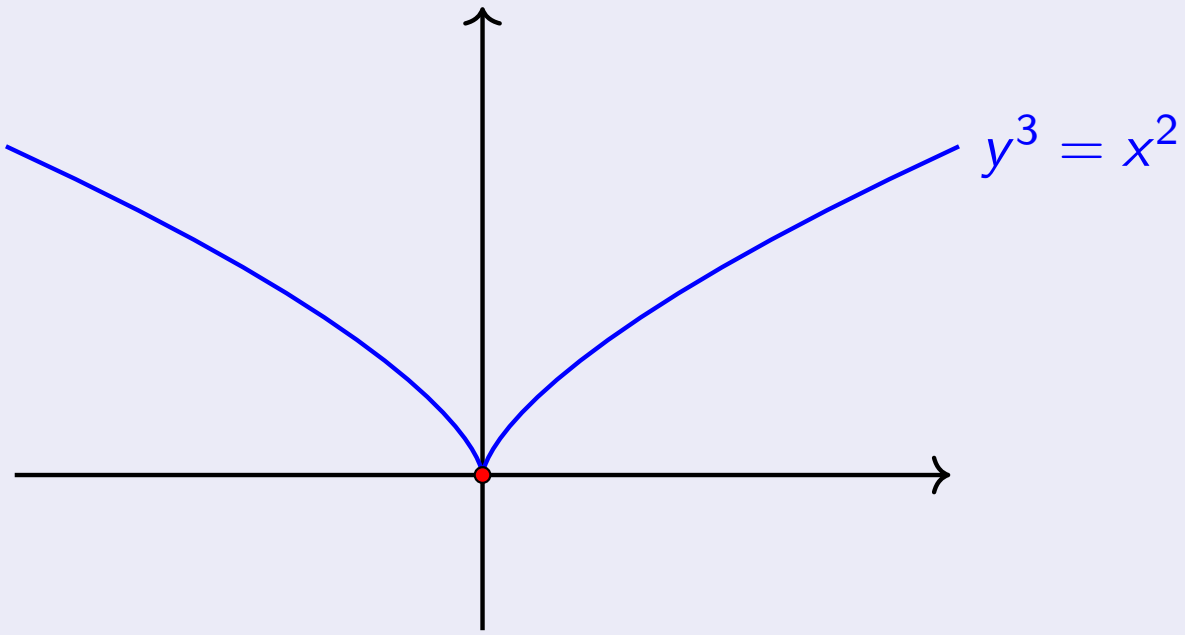


Figura: O traço de $y^3 = x^2$.

Pelo que vimos até aqui, mesmo que informalmente, parace natural chamá-lo de ponto singular da curva.

História Singular

A origem do estudo de pontos críticos de funções remonta ao cálculo diferencial. Os grandes cientistas Newton e Leibniz travavam uma célebre disputa pela paternidade do cálculo infinitesimal.

Em torno de 1930, Morse apresentou seu famoso Lema de Morse, que é capaz de classificar pontos críticos não degenerados.

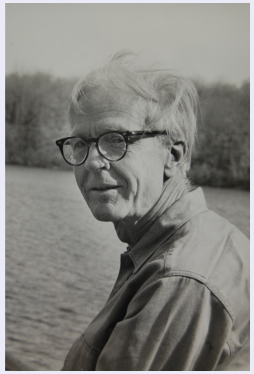
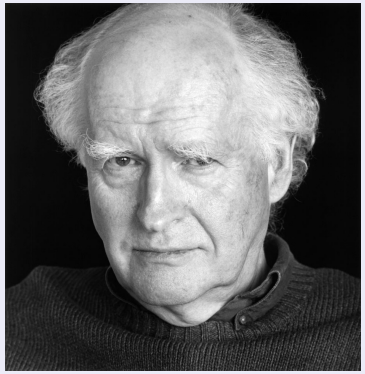
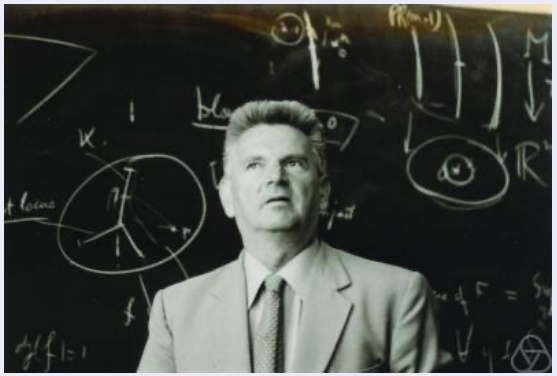
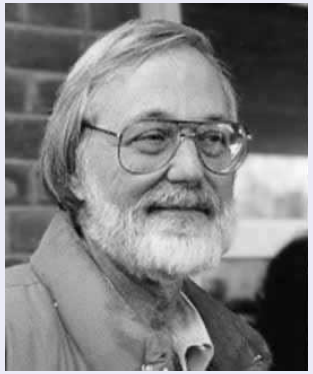
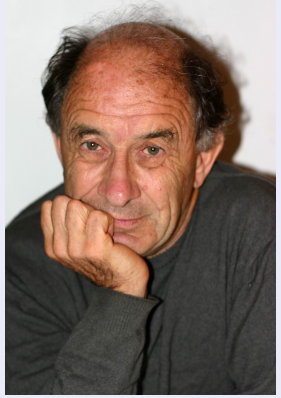
Lemma (Lema de Morse)

Seja $f \in C^k(\mathbb{R}^n)$ uma função com ponto crítico não degenerado na origem. Então existe uma mudança de coordenadas h tal que

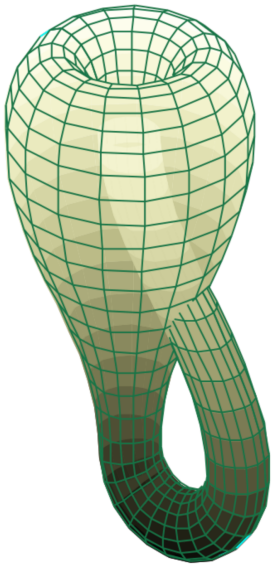
$$(f \circ h)(x_1, \ldots, x_n) = -x_1^2 - x_2^2 - \cdots - x_s^2 + x_{s+1}^2 + x_{s+2}^2 + \cdots + x_n^2.$$

Um exemplo simples desse lema é a classificação de pontos críticos não degenerados de uma função suave de duas variáveis (no caso real), em que o ponto pode ser um máximo local, mínimo local ou ponto de sela.

A Teoria de Singularidades é uma teoria relativamente nova, seu estudo sistemático teve origem por volta dos anos 1950, com trabalhos de Whitney, Mather, Thom, e posteriormente por Milnor e Arnold.

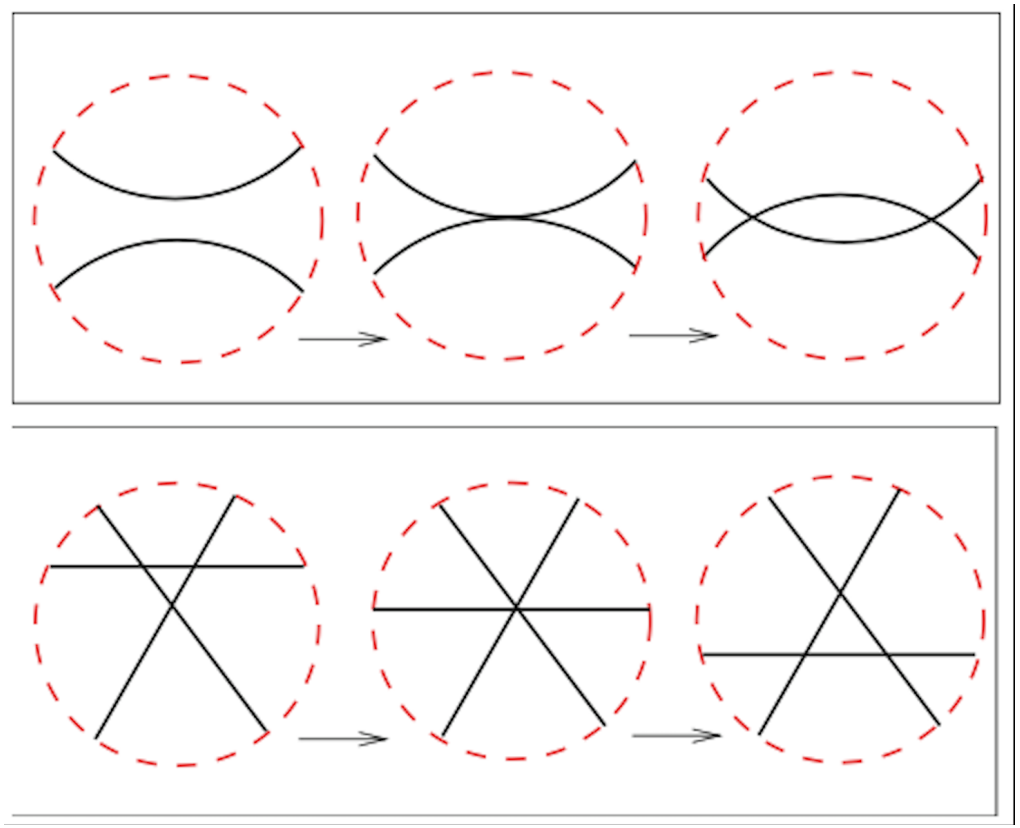






Nesse contexto, um resultado famoso de Whitney na Topologia Diferencial afirma que qualquer variedade real suave de dimensão m pode ser mergulhada (suavemente) no espaço $\mathbb{R}^{2m}$. Isso significa que, abaixo dessa dimensão, podem aparecer singularidades, e a questão é: quais singularidades podem ser "removidas" e quais são "estáveis"? Essa é uma questão central da Teoria das Singularidades.



Conceitos Fundamentais na Teoria de Singularidades

- Genericidade;
- Estabilidade Estrutural.
- Classificação



Singularidade Brasileira

Esta teoria chegou ao Brasil na decada de 1960 através do Prof. Gilberto Francisco Loibel (24/05/1932 - 14/11/2013).

Singularidade Brasileira

Esta teoria chegou ao Brasil na decada de 1960 através do Prof. Gilberto Francisco Loibel (24/05/1932 - 14/11/2013).

O docente, na época professor na USP - São Carlos, escreveu o primeiro livro sobre Teoria de Singularidades no Brasil, publicado pelo Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada, em 1967, quando ministrou o primeiro curso sobre o assunto no Brasil, no sexto Colóquio Brasileiro de Matemática.

Algumas linhas de pesquisa

1. Topologia das singularidades
2. Classificação das singularidades
3. Teoria Algébrica de Singularidades
4. Singularidades em geometria diferencial e equações implícitas
5. Aplicações da teoria de singularidades a problemas de bifurcações

Germes de Funções Suaves

Para que possamos estudarmos propriedades locais de aplicações do tipo $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, vamos introduzir o conceito de germe de aplicações. Este conceito pode ser definido de forma mais geral no contexto de aplicações $f : U \to Y$ entre espaços topológicos em um subconjunto $S \subset U$, mas vamos nos restringir ao contexto de aplicações entre subconjuntos do $\mathbb{R}^n$ dotados da topologia induzida.

Conceito de Germe

Definition

1. *Sejam* $S \subset \mathbb{R}^n$, $f : U \to \mathbb{R}^p$ *e* $g : V \to \mathbb{R}^p$ *aplicações, onde* U *e* V *são vizinhanças abertas de* S *em* $\mathbb{R}^n$. *Dizemos que* f *e* g *têm o mesmo germe em* S, *se existe uma vizinhança aberta* $W \subset U \cap V$ *de* S *em* $\mathbb{R}^n$ *tal que* f *e* g *coincidem em* W. *Isso é uma relação de equivalência, e um germe de aplicação em* S *é uma classe de equivalência sob essa relação.*
2. *Denotamos um germe em* S *de uma aplicação* $f : U \to \mathbb{R}^p$ *por* $f : (\mathbb{R}^n, S) \to \mathbb{R}^p$, *ou* $f : (\mathbb{R}^n, S) \to (\mathbb{R}^p, T)$ *se* $f(S) \subset T \subset \mathbb{R}^p$. *Dado um germe de aplicação* $f : (\mathbb{R}^n, S) \to \mathbb{R}^p$, *cada membro* $f : U \to \mathbb{R}^p$ *da classe de equivalência correspondente é chamado de representante.*

Consideremos $S = \{0\}$.

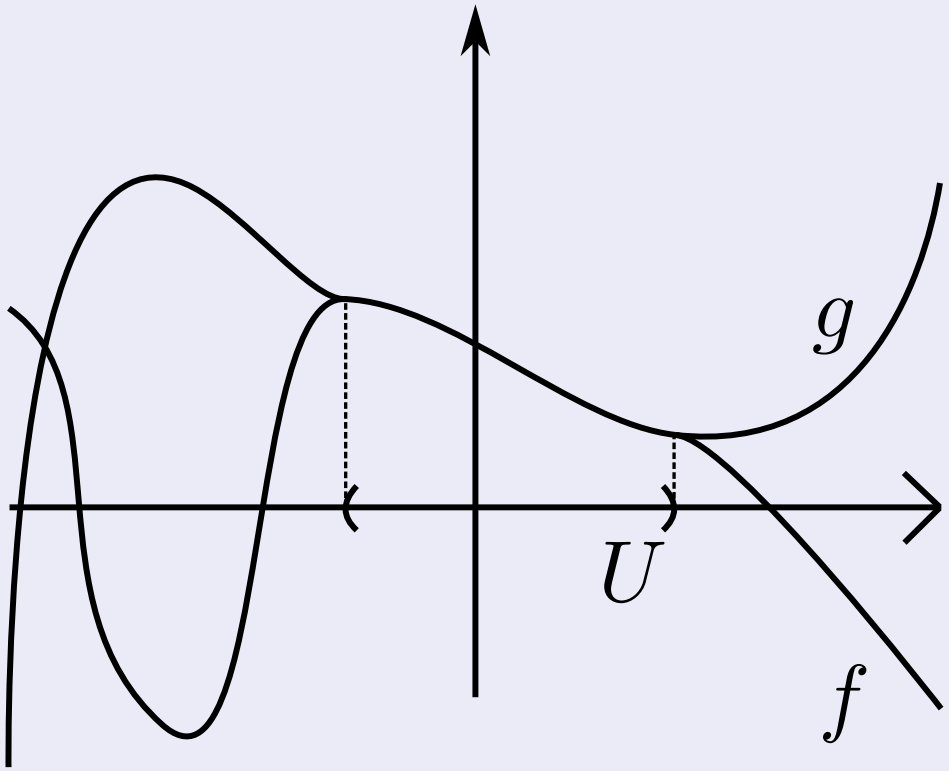


Figura: Exemplo de dois representantes para o mesmo germe na origem

- Um germe em um ponto x, ou seja, quando temos $S = \{x\}$, é chamado monogerme, diferenciando do caso em que o conjunto S possui mais de um ponto que chamamos de multigerme.
- Quando o conjunto S é finito ainda dizemos germe em S mas quando o conjunto S for infinito costumamos nos referir a germe ao longo de S.

- Um germe $f\colon (\mathbb{R}^n, S) \to \mathbb{R}^p$ é chamado de contínuo (suave) se existir um representante do germe que seja contínuo (suave).
- Dados dois germes contínuos $f\colon U \to Y$ e $g\colon V \to Z$, com $q = f(p)$, definimos a **composição** $g \circ f\colon (\mathbb{R}^n, p) \to \mathbb{R}^k$ como o germe representado pela composição $g\big|_V \circ f\big|_U$, onde U é uma vizinhança aberta de p em $\mathbb{R}^n$ e V é uma vizinhança aberta de q em $\mathbb{R}^m$ tais que a composição dos representantes está bem posta.

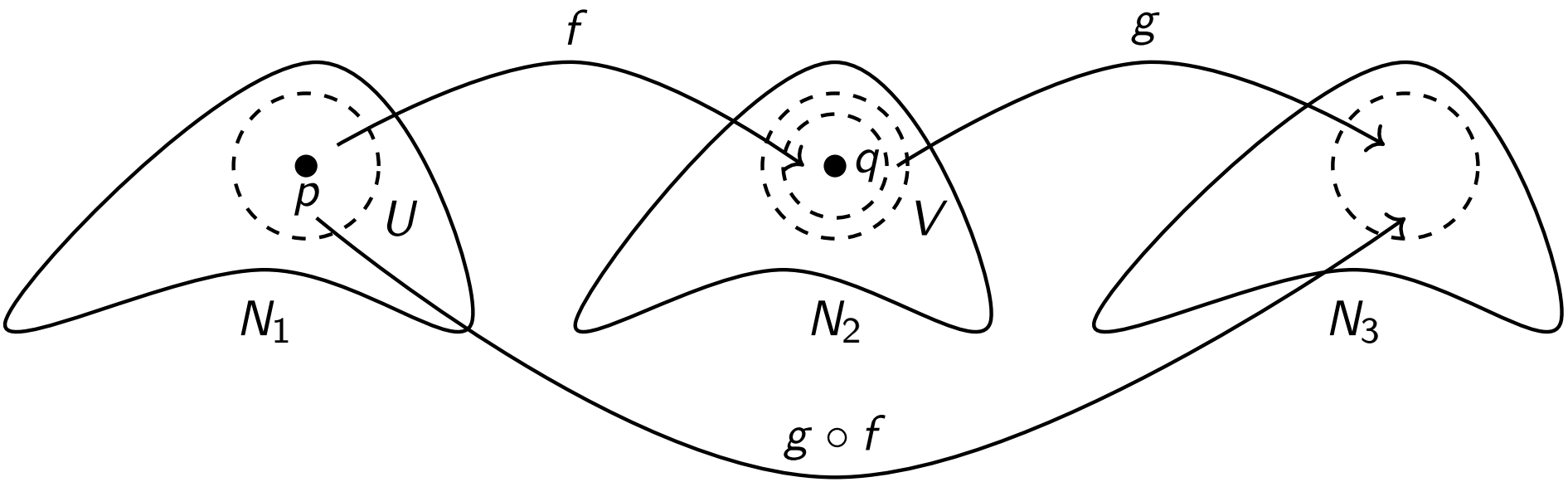


Figura: Representação pictórica da composição de germes

Definition

Dizemos que $f : (\mathbb{R}^n, 0) \to \mathbb{R}^n$ *é um* **germe de difeomorfismo** *se um de seus representantes é um difeomorfismo local em uma vizinhança de* 0.

Definition

Sejam $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ *uma aplicação suave e* $df_x : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ *sua derivada. Dizemos que*:

i) *Um ponto* $x \in \mathbb{R}^n$ *é um* **ponto crítico de** f *se* df_x *não é sobrejetora, isto é,* $(df_x) < p$. *Definimos o* **conjunto de pontos críticos de** f *por* $(f)\{x \in \mathbb{R}^n \mid (df_x) < p\}$. *O conjunto* $f((f))$ *é chamado de conjunto dos valores críticos de* f.

ii) *Um ponto* $x \in \mathbb{R}^n$ *é dito* **ponto regular de** f *se* df_x *for sobrejetora. Definimos o* **conjunto de pontos regulares de** f *por* (f) *e o conjunto* $f((f))$ *é chamdao de conjuntos dos valores regulares de* f.

iii) *Um ponto* $x \in \mathbb{R}^n$ *é um* **ponto singular de** f *se o posto de* df_x *não é o máximo possível, isto é,* $(df_x) < \min\{n, p\}$. *Denotamos o conjunto dos pontos singulares por* $(f)\{x \in \mathbb{R}^n \mid (df_x) < \min\{n, p\}\}$.

vi) *O conjunto* $f(Sing(f))$ *é chamado de conjunto discriminante de* f *e denotado por* $\Delta(f)$.

Posto de um germe

O posto de um germe $f(\mathbb{R}^n, 0) \to \mathbb{R}^p$ é o posto de seu representante f no ponto 0.

Seja $f\colon (\mathbb{R}^n, x) \to (\mathbb{R}^p, f(x))$ um germe suave:

- Se o posto de f for n dizemos que o germe f é uma **imersão**
- Se o posto de f for p dizemos que o germe f é uma **submersão**.

Formas Locais

Theorem (Forma Local das Imersões)

Sejam $U \subseteq \mathbb{R}^n$ um subconjunto aberto e $f\colon U \to \mathbb{R}^p$ uma aplicação suave, $0 \in U$, com $n \leq p$, $f(0) = 0$ e f uma imersão em 0. Então existe um difeomorfismo $k\colon V \to W$, onde V e W são vizinhanças abertas de 0 em $\mathbb{R}^p$, tão pequenas quanto necessário, com $k(0) = 0$, tal que

$$(k \circ f)(x_1, \ldots, x_n) = (x_1, \ldots, x_n, 0, \ldots, 0).$$

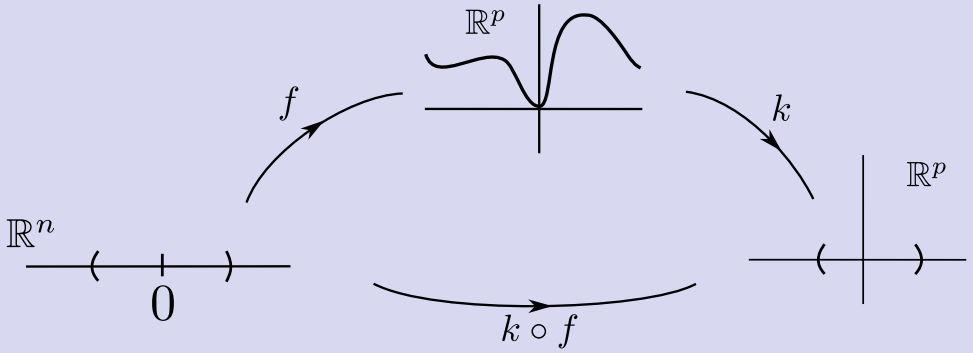


Figura: *Representação pictórica da Forma Local das Imersões*

Formas Locais

Theorem (Forma Local das Submersões)

Sejam $U \subseteq \mathbb{R}^m$ um subconjunto aberto e $f\colon U \to \mathbb{R}^p$ uma aplicação suave, com $0 \in U$, $m \geq p$, $f(0) = 0$ e f uma submersão em 0. Então existe um difeomorfismo $h\colon V \to W$, onde V e W são vizinhanças abertas de 0 em U, tão pequenas quanto necessário, com $h(0) = 0$, tal que

$$(f \circ h^{-1})(x_1, \ldots, x_m) = (x_1, \ldots, x_p).$$

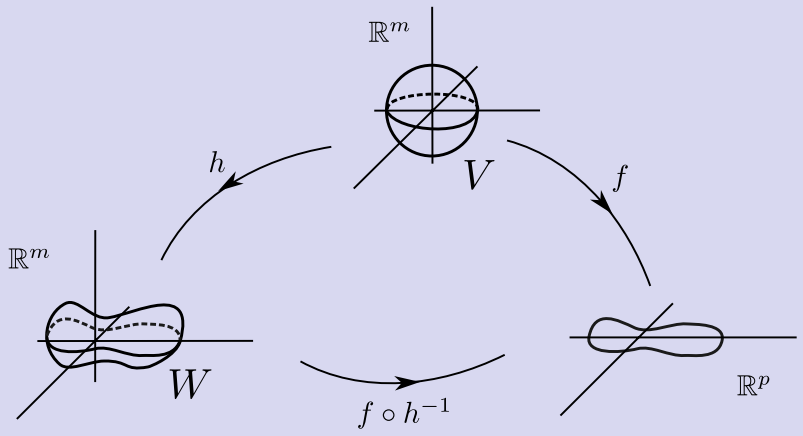
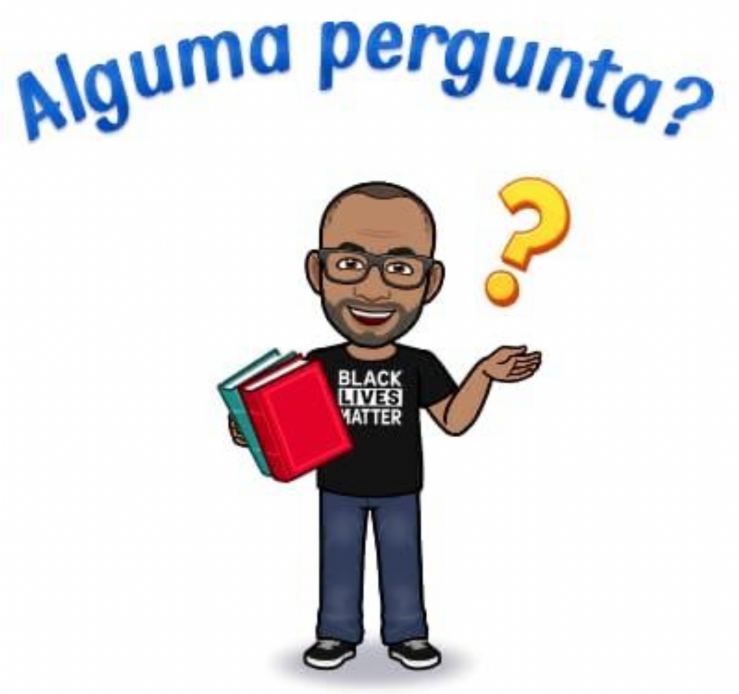


Figura: *Representação pictórica da Forma Local das Submersões*

Muito Obrigado!