Uma Breve Introdução à Teoria de Singularidades

Nivaldo Grulha
(ICMC - USP)

3rdYRS 2024

Conceito de Germe

Definition

1. *Sejam* $S \subset \mathbb{R}^n$, $f : U \to \mathbb{R}^p$ *e* $g : V \to \mathbb{R}^p$ *aplicações, onde* U *e* V *são vizinhanças abertas de* S *em* $\mathbb{R}^n$. *Dizemos que* f *e* g *têm o mesmo germe em* S, *se existe uma vizinhança aberta* $W \subset U \cap V$ *de* S *em* $\mathbb{R}^n$ *tal que* f *e* g *coincidem em* W. *Isso é uma relação de equivalência, e um germe de aplicação em* S *é uma classe de equivalência sob essa relação.*
2. *Denotamos um germe em* S *de uma aplicação* $f : U \to \mathbb{R}^p$ *por* $f : (\mathbb{R}^n, S) \to \mathbb{R}^p$, *ou* $f : (\mathbb{R}^n, S) \to (\mathbb{R}^p, T)$ *se* $f(S) \subset T \subset \mathbb{R}^p$. *Dado um germe de aplicação* $f : (\mathbb{R}^n, S) \to \mathbb{R}^p$, *cada membro* $f : U \to \mathbb{R}^p$ *da classe de equivalência correspondente é chamado de representante.*

Consideremos $S = f0g$.

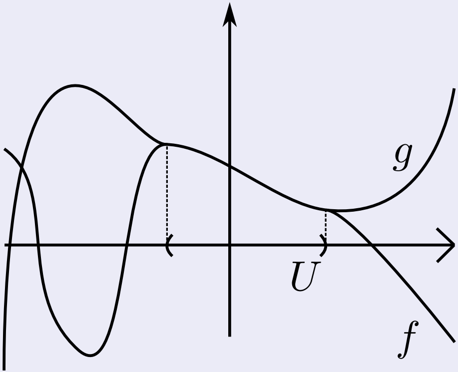

Figura: Exemplo de dois representantes para o mesmo germe na origem

Germes suaves

Definition

$$''_{n;p} = ff : (\mathrm{R}^n; 0) \ \ ! \ \ \mathrm{R}^p \ j \ f \ \ e \ germe \ de \ aplicacao \ em \ 0g:$$

O anel $''_n$

No caso $p = 1$, denotamos $''_{n;1}$ simplesmente por $''_n$.

O anel $''_n$

No caso $p = 1$, denotamos $''_{n;1}$ simplesmente por $''_n$.

$(''_n; +; \ )$ é um anel comutativo com unidade, onde as operações são

$$[f] + [g] = [f + g] \text{ e } [f] \quad [g] = [f \quad g];$$

onde a adição e multiplicação ocorrem na intersecção dos domínios de seus representantes, e as classes $[f + g]$ e $[f \quad g]$ independem da representação tomada.

O anel $''_n$

No caso $p = 1$, denotamos $''_{n;1}$ simplesmente por $''_n$.

$(''_n; +;\ )$ é um anel comutativo com unidade, onde as operações são

$$[f] + [g] = [f + g] \text{ e } [f]\ \ [g] = [f\ \ g];$$

onde a adição e multiplicação ocorrem na intersecção dos domínios de seus representantes, e as classes $[f + g]$ e $[f\ \ g]$ independem da representação tomada.

O elemento neutro e a unidade são os germes representados pelas funções nula e a função constante igual a 1, que denotaremos apenas por 0 e 1, respectivamente.

Proposition

Um elemento f 2 "$_n$ possui inverso multiplicativo se, e somente se, $f(0) \neq 0$.

Proposition

Um elemento $f \in \mathcal{E}_n$ possui inverso multiplicativo se, e somente se, $f(0) \neq 0$.

Proposition

O anel $\mathcal{E}_n$ e um anel local, com o seu ideal maximal dado por

$$\mathfrak{m}_n := \{f \in \mathcal{E}_n \mid f(0) = 0\}.$$

Proposition

Um elemento $f \in \mathcal{E}_n$ possui inverso multiplicativo se, e somente se, $f(0) \neq 0$.

Proposition

O anel $\mathcal{E}_n$ é um anel local, com o seu ideal maximal dado por

$$\mathfrak{m}_n := \{f \in \mathcal{E}_n \mid f(0) = 0\}.$$

Lemma (Lema de Hadamard)

Sejam U uma vizinhanca convexa de 0 em $\mathbb{R}^n$ e $f : U \times \mathbb{R}^q \to \mathbb{R}$ uma função suave. Se $f(0, y) = 0$, para todo $y \in \mathbb{R}^q$, então existem funções suaves $f_1(x, y), \ldots, f_n(x, y)$ tais que

$$f = x_1 \cdot f_1 + x_2 \cdot f_2 + \cdots + x_n \cdot f_n.$$

Proposition

O ideal $\mathfrak{m}_n$ e um ideal nitamente gerado, gerado pelos germes de funcões que tem como representante as funcões coordenadas $x_1;:::;x_n$.

Espaço de Jatos

Espaço de Jatos

Definition

O espaco de jatos $J^k(n;p)$ e o espaco vetorial real das aplicacões $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ onde cada componente f_i de f e um polonômio de grau k nas coordenadas canônicas $x_1, x_2, \ldots, x_n$ com termo constante nulo. Os elementos de $J^k(n;p)$ são chamados k-jatos.

Espaço de Jatos

Definition

O espaço de jatos $J^k(n, p)$ é o espaço vetorial real das aplicações $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ onde cada componente f_i de f é um polonômio de grau $\leq k$ nas coordenadas canônicas $x_1, x_2, \ldots, x_n$ com termo constante nulo. Os elementos de $J^k(n, p)$ são chamados k-jatos.

Definition

Dada uma aplicação suave $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, definimos a **aplicação k-jato de f** *por $j^k f : \mathbb{R}^n \to J^k(n, m)$ dada por: Para cada $a \in \mathbb{R}^n$, o elemento $j^k f(a) \in J^k(n, m)$ é o Polinômio de Taylor de ordem k da aplicação $\overline{f}(x) = [f(x) - f(a)]$ em torno de a.*

Proposition

Defina o conjunto

$$F_k := \{f \in \mathcal{E}_n \mid j^{k-1} f(0) = 0\}.$$

Então $F_k = \mathfrak{m}_n^k$.

Considere $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = sen(x)$. Então

$$
\begin{aligned}
j^3 f(0) &= f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 \\
&= \cos(0)x + \frac{\quad(0)}{2!}x^2 + \frac{\quad\cos(0)}{3!}x^3 \\
&= x \quad \frac{x^3}{6}.
\end{aligned}
$$

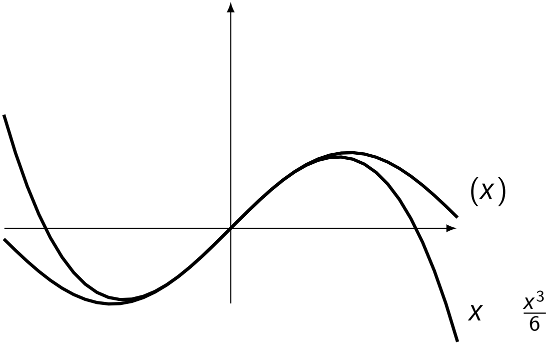

Figura: Gráficos de $sen(x)$ e $x \quad \frac{x^3}{6}$

Lemma (Lema de Nakayama)

Sejam R um anel comutativo com unidade e $\mathtt{m}$ um ideal de R com a propriedade de que $1 + x$ e invert vel em R, para todo x 2 $\mathtt{m}$, M um R-modulo e $A; B$ dois R-submodulos de M, com A nitamente gerado. Se

$$A \quad B + \mathtt{m}A;$$

entao $A \quad B$.

Exemplo

Considere $R = \mathcal{E}_2$, $M = \mathcal{E}_2$ e os R-submódulos $A = \langle x^2, y^2 \rangle$, $B = \langle x^2 + y^3, x^3 + y^2 \rangle$. Observe que $B \subset A$, pois

$$\begin{cases} x^2 + y^3 = x^2 + y \cdot y^2 \in A, \\ x^3 + y^2 = x \cdot x^2 + y^2 \in A. \end{cases}$$

Não é claro que vale a inclusão contrária, mas aplicando o Lema da Nakayama, podemos provar isto. Para isto, basta provar que

$$A \subset B + \mathfrak{m}_2 \cdot A.$$

Observe que

$$\mathfrak{m}_2 A = \langle x, y \rangle \langle x^2, y^2 \rangle = \langle x^3, xy^2, x^2y, y^3 \rangle.$$

Então
$$\begin{cases} x^2 = \underbrace{(x^2 + y^3)}_{\in B} - \underbrace{y^3}_{\in \mathfrak{m}_2 A} \in B + \mathfrak{m}_2 A; \\ y^2 = \underbrace{(x^3 + y^2)}_{\in B} - \underbrace{x^3}_{\in \mathfrak{m}_2 A} \in B + \mathfrak{m}_2 A. \end{cases}$$

Assim, $A \subset B + \mathfrak{m}_2 A$ e, pelo Lema de Nakayama, vale $A \subset B$. Portanto, $A = B$.

Definition

Seja M uma R*-algebra. Um ideal I de M tem* **codimensão finita em** M *se o espaco quociente $M{=}I$ tem dimensão nita como espaco vetorial sobre* R*. A codimensão de I e de nida como a dimensão*

$$\dim_{\mathrm{R}} \; \frac{M}{I} \;\; :$$

Proposition

A algebra "$_n$ nao e um anel Noetheriano.

Proposition

A algebra $''_n$ nao e um anel Noetheriano.

Se I for um ideal de $''_n$, usando a definição de codimensão temos quem a **codimensão de I em** $''_n$ é dada por

$$\dim_{\mathrm{R}} \frac{''_n}{I} \; :$$

Denotaremos esse número inteiro, maior ou igual a zero, por $Cod(I)$.

Proposition

Seja I um ideal de $\mathcal{E}_n$. Então $Cod(I)$ é finito ($Cod(I) < \infty$) se, e somente se, existe $k \in \mathbb{Z}$, com $k \geq 1$, tal que $\mathfrak{m}_n^k \subset I$.

Exemplo

Considere o ideal $I = \langle x^2+y^3, y^2+x^3 \rangle \quad \mathcal{E}_2$. Vamos calcular cod(I).
Como vimos anteriormente $I = \langle x^2, y^2 \rangle$, logo,

$$(\langle x^2+y^3, y^2+x^3 \rangle) = (\langle x^2, y^2 \rangle) = \dim_{\mathbb{R}} \quad \frac{\mathcal{E}_2}{\langle x^2, y^2 \rangle} \quad .$$

Como $\mathfrak{m}_2^3 \quad \langle x^2, y^2 \rangle$, então

$$\frac{\mathcal{E}_2}{\langle x^2, y^2 \rangle} = \frac{\mathcal{E}_2}{\langle x^2, y^2 \rangle + \mathfrak{m}_2^3} = \mathbb{R}\{1, x, y, xy\}.$$

Portanto, $(\langle x^2+y^3, y^2+x^3 \rangle) = 4$.