Uma Breve Introdução à Teoria de Singularidades

Nivaldo Grulha
(ICMC - USP)

3rdYRS 2024

Conceito de Germe

Definition

1. *Sejam* $S \subset \mathbb{R}^n$, $f : U \to \mathbb{R}^p$ *e* $g : V \to \mathbb{R}^p$ *aplicações, onde* U *e* V *são vizinhanças abertas de* S *em* $\mathbb{R}^n$. *Dizemos que* f *e* g *têm o mesmo germe em* S, *se existe uma vizinhança aberta* $W \subset U \cap V$ *de* S *em* $\mathbb{R}^n$ *tal que* f *e* g *coincidem em* W. *Isso é uma relação de equivalência, e um germe de aplicação em* S *é uma classe de equivalência sob essa relação.*
2. *Denotamos um germe em* S *de uma aplicação* $f : U \to \mathbb{R}^p$ *por* $f : (\mathbb{R}^n, S) \to \mathbb{R}^p$, *ou* $f : (\mathbb{R}^n, S) \to (\mathbb{R}^p, T)$ *se* $f(S) \subset T \subset \mathbb{R}^p$. *Dado um germe de aplicação* $f : (\mathbb{R}^n, S) \to \mathbb{R}^p$, *cada membro* $f : U \to \mathbb{R}^p$ *da classe de equivalência correspondente é chamado de representante.*

Consideremos $S = \{0\}$.

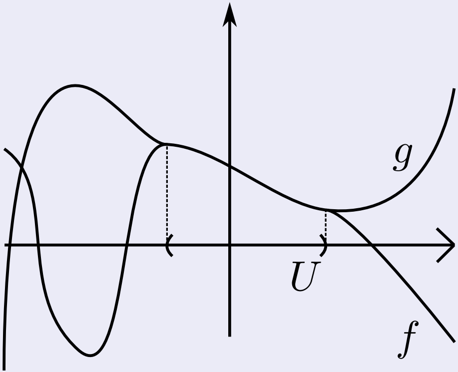

Figura: Exemplo de dois representantes para o mesmo germe na origem

Germes suaves

Definition

$$\varepsilon_{n,p} = \{f\colon (\mathbb{R}^n, 0) \to \mathbb{R}^p \mid f \text{ é germe de aplicação em } 0\}.$$

O anel ε_n

No caso $p = 1$, denotamos $\varepsilon_{n,1}$ simplesmente por ε_n.

O anel ε_n

No caso $p = 1$, denotamos $\varepsilon_{n,1}$ simplesmente por ε_n.

$(\varepsilon_n, +, \cdot)$ é um anel comutativo com unidade, onde as operações são

$$[f] + [g] = [f + g] \text{ e } [f] \cdot [g] = [f \cdot g],$$

onde a adição e multiplicação ocorrem na intersecção dos domínios de seus representantes, e as classes $[f + g]$ e $[f \cdot g]$ independem da representação tomada.

O anel ε_n

No caso $p = 1$, denotamos $\varepsilon_{n,1}$ simplesmente por ε_n.

$(\varepsilon_n, +, \cdot)$ é um anel comutativo com unidade, onde as operações são

$$[f] + [g] = [f + g] \text{ e } [f] \cdot [g] = [f \cdot g],$$

onde a adição e multiplicação ocorrem na intersecção dos domínios de seus representantes, e as classes $[f + g]$ e $[f \cdot g]$ independem da representação tomada.

O elemento neutro e a unidade são os germes representados pelas funções nula e a função constante igual a 1, que denotaremos apenas por 0 e 1, respectivamente.

Proposition

Um elemento $f \in \varepsilon_n$ *possui inverso multiplicativo se, e somente se,* $f(0) \neq 0$.

Proposition

Um elemento $f \in \varepsilon_n$ possui inverso multiplicativo se, e somente se, $f(0) \neq 0$.

Proposition

O anel ε_n é um anel local, com o seu ideal maximal dado por

$$\mathfrak{m}_n := \{f \in \varepsilon_n \mid f(0) = 0\}.$$

Proposition

Um elemento $f \in \varepsilon_n$ possui inverso multiplicativo se, e somente se, $f(0) \neq 0$.

Proposition

O anel ε_n é um anel local, com o seu ideal maximal dado por

$$\mathfrak{m}_n := \{f \in \varepsilon_n \mid f(0) = 0\}.$$

Lemma (Lema de Hadamard)

Sejam U uma vizinhança convexa de 0 em $\mathbb{R}^n$ e $f : U \times \mathbb{R}^q \to \mathbb{R}$ uma função suave. Se $f(0, y) = 0$, para todo $y \in \mathbb{R}^q$, então existem funções suaves $f_1(x, y), \dots, f_n(x, y)$ tais que

$$f = x_1 \cdot f_1 + x_2 \cdot f_2 + \cdots + x_n \cdot f_n.$$

Proposition

O ideal $\mathfrak{m}_n$ é um ideal finitamente gerado, gerado pelos germes de funções que tem como representante as funções coordenadas $x_1, \ldots, x_n$.

Espaço de Jatos

Espaço de Jatos

Definition

O espaço de jatos $J^k(n, p)$ *é o espaço vetorial real das aplicações* $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ *onde cada componente* f_i *de* f *é um polonômio de grau* $\leq k$ *nas coordenadas canônicas* $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *com termo constante nulo. Os elementos de* $J^k(n, p)$ *são chamados* k*-jatos.*

Espaço de Jatos

Definition

O espaço de jatos $J^k(n,p)$ *é o espaço vetorial real das aplicações* $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ *onde cada componente* f_i *de* f *é um polonômio de grau* $\leq k$ *nas coordenadas canônicas* $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *com termo constante nulo. Os elementos de* $J^k(n,p)$ *são chamados* k*-jatos.*

Definition

Dada uma aplicação suave $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$*, definimos a* **aplicação** k**-jato de** f *por* $j^k f : \mathbb{R}^n \to J^k(n,m)$ *dada por: Para cada* $a \in \mathbb{R}^n$*, o elemento* $j^k f(a) \in J^k(n,m)$ *é o Polinômio de Taylor de ordem* k *da aplicação* $\overline{f}(x) = [f(x) - f(a)]$ *em torno de* a*.*

Proposition

Defina o conjunto

$$\mathcal{F}_k := \{f \in \varepsilon_n \mid j^{k-1}f(0) = 0\}.$$

Então $\mathcal{F}_k = \mathfrak{m}_n^k$.

Considere $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = sen(x)$. Então

$$\begin{aligned} j^3 f(0) &= f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 \\ &= \cos(0)x + \frac{-(0)}{2!}x^2 + \frac{-\cos(0)}{3!}x^3 \\ &= x - \frac{x^3}{6}. \end{aligned}$$

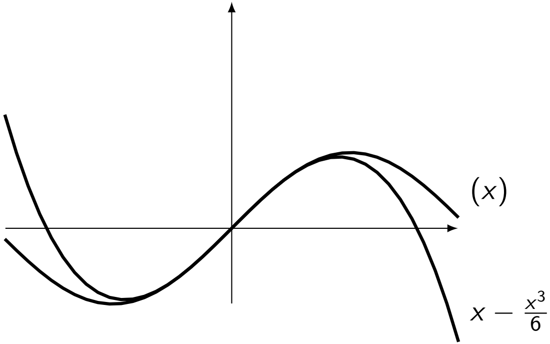

Figura: Gráficos de $sen(x)$ e $x - \frac{x^3}{6}$

Lemma (Lema de Nakayama)

Sejam R um anel comutativo com unidade e $\mathfrak{m}$ um ideal de R com a propriedade de que $1 + x$ é invertível em R, para todo $x \in \mathfrak{m}$, M um R-módulo e A, B dois R-submódulos de M, com A finitamente gerado. Se

$$A \subseteq B + \mathfrak{m}A,$$

então $A \subseteq B$.

Exemplo

Considere $R = \varepsilon_2$, $M = \varepsilon_2$ e os R-submódulos $A = \langle x^2, y^2 \rangle$, $B = \langle x^2 + y^3, x^3 + y^2 \rangle$. Observe que $B \subseteq A$, pois

$$\begin{cases} x^2 + y^3 = x^2 + y \cdot y^2 \in A, \\ x^3 + y^2 = x \cdot x^2 + y^2 \in A. \end{cases}$$

Não é claro que vale a inclusão contrária, mas aplicando o Lema da Nakayama, podemos provar isto. Para isto, basta provar que

$$A \subseteq B + \mathfrak{m}_2 \cdot A.$$

Observe que

$$\mathfrak{m}_2 \cdot A = \langle x, y \rangle \cdot \langle x^2, y^2 \rangle = \langle x^3, xy^2, x^2y, y^3 \rangle.$$

Então

$$\begin{cases} x^2 = \underbrace{(x^2 + y^3)}_{\in B} - \underbrace{y^3}_{\in \mathfrak{m}_2 \cdot A} \in B + \mathfrak{m}_2 \cdot A, \\ y^2 = \underbrace{(x^3 + y^2)}_{\in B} - \underbrace{x^3}_{\in \mathfrak{m}_2 \cdot A} \in B + \mathfrak{m}_2 \cdot A. \end{cases}$$

Assim, $A \subseteq B + \mathfrak{m}_2 \cdot A$ e, pelo Lema de Nakayama, vale $A \subseteq B$. Portanto, $A = B$.

Definition

Seja M uma $\mathbb{R}$-álgebra. Um ideal I de M tem **codimensão finita em** *M se o espaço quociente M/I tem dimensão finita como espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$. A codimensão de I é definida como a dimensão*

$$\dim_{\mathbb{R}}\left(\frac{M}{I}\right).$$

Proposition

A álgebra ε_n não é um anel Noetheriano.

Proposition

A álgebra ε_n não é um anel Noetheriano.

Se I for um ideal de ε_n, usando a definição de codimensão temos quem a **codimensão de I em ε_n** é dada por

$$\dim_{\mathbb{R}}\left(\frac{\varepsilon_n}{I}\right).$$

Denotaremos esse número inteiro, maior ou igual a zero, por $Cod(I)$.

Proposition

Seja I um ideal de ε_n. Então $Cod(I)$ é finito ($Cod(I) < \infty$) se, e somente se, existe $k \in \mathbb{Z}$, com $k \geq 1$, tal que $\mathfrak{m}_n^k \subseteq I$.

Exemplo

Considere o ideal $I = \langle x^2 + y^3, y^2 + x^3 \rangle \subseteq \varepsilon_2$. Vamos calcular cod(I). Como vimos anteriormente $I = \langle x^2, y^2 \rangle$, logo,

$$(\langle x^2 + y^3, y^2 + x^3 \rangle) = (\langle x^2, y^2 \rangle) = \dim_{\mathbb{R}} \left(\frac{\varepsilon_2}{\langle x^2, y^2 \rangle} \right).$$

Como $\mathfrak{m}_2^3 \subseteq \langle x^2, y^2 \rangle$, então

$$\frac{\varepsilon_2}{\langle x^2, y^2 \rangle} = \frac{\varepsilon_2}{\langle x^2, y^2 \rangle + \mathfrak{m}_2^3} \cong \mathbb{R}\{1, x, y, xy\}.$$

Portanto, $(\langle x^2 + y^3, y^2 + x^3 \rangle) = 4$.

Muito Obrigado!