

4 | Germes de Aplicações Suaves

Para que possamos estudarmos propriedades locais de aplicações vamos introduzir o conceito de germe de aplicações. Este conceito pode ser definido de forma mais geral no contexto de aplicações $f: U \rightarrow Y$ entre espaços topológicos em um subconjunto $S \subset U$, vamos aqui definir dentro do contexto de aplicações entre subconjuntos do \mathbb{R}^n dotados da topologia induzida.

4.1 Conceito de Germe

Definição 4.1. Sejam $X \subset \mathbb{R}^n$ e $Y \subset \mathbb{R}^p$ subconjuntos dotados da topologia induzida e $S \subset X$.

1. Sejam $f: U \rightarrow Y$ e $g: V \rightarrow Y$ aplicações, onde U e V são vizinhanças abertas de S em X . Dizemos que f e g têm o mesmo germe em S , se existe uma vizinhança aberta $W \subset U \cap V$ de S em X tal que f e g coincidem em W . Isso é uma relação de equivalência, e um germe de aplicação em S é uma classe de equivalência sob essa relação.
2. Dois subconjuntos X_1 e X_2 de X têm o mesmo germe em S se existe uma vizinhança aberta U de S em X tal que $X_1 \cap U = X_2 \cap U$. Um germe de subconjunto de X ou germe de conjunto em S é uma classe de equivalência de subconjuntos sob essa relação.
3. Denotamos um germe em S de uma aplicação $f: U \rightarrow Y$ por $f: (X, S) \rightarrow Y$, ou $f: (X, S) \rightarrow (Y, T)$ se $f(S) \subset T \subset Y$. Dado um germe de aplicação $f: (X, S) \rightarrow Y$, cada membro $f: U \rightarrow Y$ da classe de equivalência correspondente é chamado de representante. Analogamente, o germe em S de um

subconjunto X_1 de X é denotado por (X_1, S) e cada membro X_1 da classe de equivalência correspondente é chamado de representante do germe de conjunto.

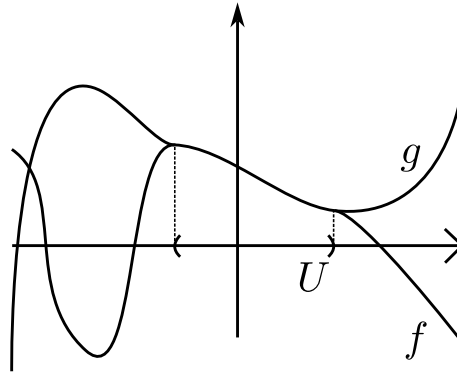


Figura 4.1: Exemplo de dois representantes para o mesmo germe na origem

Um germe em um ponto x , ou seja, quando temos $S = \{x\}$, é chamado monogerme, diferenciando do caso em que o conjunto S possui mais de um ponto que chamamos de multigerme. Quando o conjunto S é finito ainda dizemos germe em S mas quando o conjunto S for infinito costumamos nos referir a germe ao longo de S .

Definição 4.2. Um germe de aplicação $f: (X, S) \rightarrow Y$ é chamado de contínuo se existir um representante $f: U \rightarrow Y$ do germe que seja contínuo.

Definição 4.3. Sejam $f: U \rightarrow Y$ e $g: V \rightarrow Z$ dois germes, com $q := f(p)$. Definimos a **composição** $g \circ f: (\mathbb{R}^n, p) \rightarrow \mathbb{R}^k$ como o germe representado pela composição $g|_V \circ f|_U$, onde U é uma vizinhança aberta de p em \mathbb{R}^n e V é uma vizinhança aberta de q em \mathbb{R}^m tais que a composição dos representantes está bem posta.

Definição 4.4. Um germe de aplicação $\phi: (X, S) \rightarrow Y$ é chamado de germe de homeomorfismo, ou simplesmente homeomorfismo, quando o contexto de germes esteja claro, se existir um representante $\phi: U \rightarrow V$ do germe que seja um homeomorfismo.

Definição 4.5. Um germe de aplicação $f: (X, S) \rightarrow Y$ é dito inversível como germe de aplicação se existir um germe $f: (Y, T) \rightarrow X$ tal que $g \circ f: (X, S) \rightarrow (X, S) = Id: (X, S) \rightarrow (X, S)$.

Observação 4.1. Nosso objetivo é estudar germes de aplicações diferenciáveis. Assim como no caso da continuidade, é necessário definir o que entendemos por germe diferenciável ou, como abordamos aqui, germes suaves ou seja, precisamos de uma definição apropriada para a derivada de um germe em seu ponto base.

Definição 4.6. Um germe de aplicação $f: (\mathbb{R}^n, S) \rightarrow \mathbb{R}^p$ é chamado de suave se existir um representante $f: U \rightarrow \mathbb{R}^p$ do germe que seja suave.

Note que a definição está bem formulada, pois, se existe um representante $f: U \rightarrow \mathbb{R}^p$ do germe que seja suave, a derivada $d_p f$ coincide com a derivada em p de qualquer outro representante da classe. Isso ocorre porque o germe captura as informações infinitesimais locais, e o cálculo da derivada é realizado localmente. Portanto, a derivada de um germe em seu ponto base está bem definida como a derivada de um de seus representantes nesse ponto.

O estudo local de singularidades é fundamentado no conceito de germes de funções suaves, com diversas aplicações em várias áreas da matemática, como geometria diferencial, análise complexa e física matemática. Esse estudo pode ser realizado no contexto de aplicações $f \in \mathcal{C}^\infty(M, N)$, onde M e N são variedades suaves. No entanto, como toda variedade suave é localmente equivalente a um aberto euclidiano, a análise se reduz a um estudo local em espaços euclidianos. Assim, não há perda de generalidade ao nos restringirmos a aplicações entre espaços euclidianos.

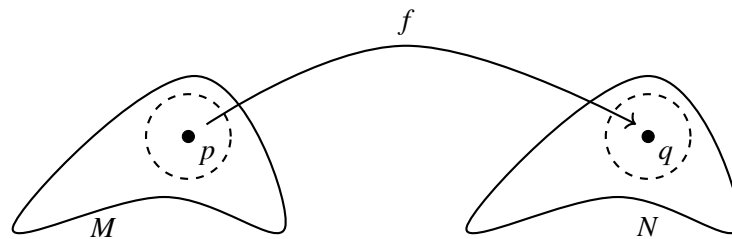


Figura 4.2: Aplicações entre variedades é, localmente, aplicações entre abertos euclidianos

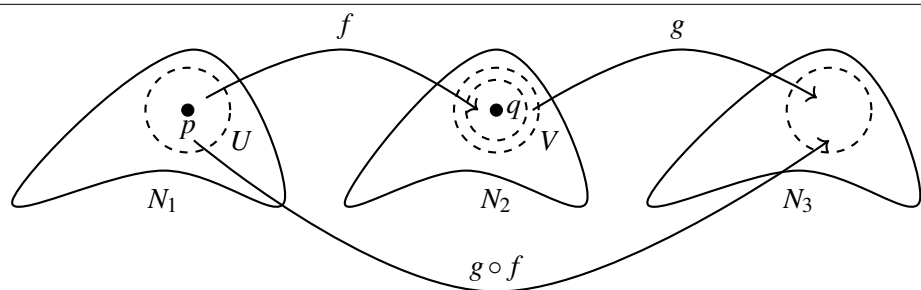


Figura 4.3: Representação pictórica da composição de germes

Definição 4.7. Sejam $f: (\mathbb{R}^n, S) \rightarrow \mathbb{R}^m$ e $g: (\mathbb{R}^m, T) \rightarrow \mathbb{R}^k$ dois germes suaves, com $f(S) \subset T$. Definimos a **composição** $g \circ f: (\mathbb{R}^n, S) \rightarrow \mathbb{R}^k$ como o germe representado pela composição $g|_V \circ f|_U$, onde U é uma vizinhança aberta de S em \mathbb{R}^n e V é uma vizinhança aberta de T em \mathbb{R}^m tais que a composição dos representantes está bem posta.

Ex: Mostre que esta definição está bem posta.

Definição 4.8. Dizemos que $f: (\mathbb{R}^n, p) \rightarrow \mathbb{R}^m$ é um **germe de difeomorfismo** se um de seus representantes é um difeomorfismo local em uma vizinhança de p .

Exemplo 4.1. Considere $f: \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^2$. Então f não é injetora, logo, não é difeomorfismo. Mas em todo $p \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $f: (\mathbb{R}, p) \rightarrow \mathbb{R}$ é um germe de difeomorfismo.

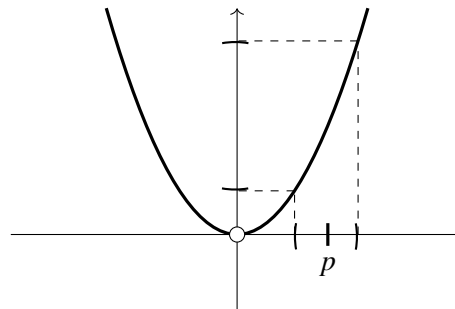


Figura 4.4: A função f

Definição 4.9. Se o posto de um germe $f: (\mathbb{R}^n, x) \rightarrow (\mathbb{R}^p, f(x))$ é n dizemos que o germe é **imersível** e se seu posto é p dizemos que o germe é **submersível**. Quando

o germe não é imersível e nem submersível em x dizemos que x é **ponto singular** do germe.

Exemplo 4.2. Considere $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por

$$f(x, y) := (e^x \cos(y), e^x \sin(y)).$$

Então f é germe de difeomorfismo em todo $p = (a, b) \in \mathbb{R}^2$, pois

$$\det(J(f)(p)) = \begin{vmatrix} e^a \cos(b) & -e^a \sin(b) \\ e^a \sin(b) & e^a \cos(b) \end{vmatrix} = e^{2a} (\cos^2(b) + \sin^2(b)) = e^{2a} \neq 0,$$

e a afirmação segue do Teorema da Aplicação Inversa. Porém, f não é difeomorfismo, pois f não é nem mesmo injetora, já que

$$f(0, 0) = (1, 0) = f(0, 2\pi), \text{ com } (0, 0) \neq (0, 2\pi).$$

4.2 A Álgebra ε_n

Definição 4.10. Definimos

$$\varepsilon_{n,p} := \{f: (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow \mathbb{R}^p \mid f \text{ é germe de aplicação em } 0\}.$$

No caso $p = 1$, denotamos $\varepsilon_{n,1}$ simplesmente por ε_n .

Observação 4.2. Temos que $(\varepsilon_n, +, \cdot)$ é um anel comutativo com unidade, onde as operações são

$$[f] + [g] := [f + g] \text{ e } [f] \cdot [g] := [f \cdot g],$$

onde a adição e multiplicação ocorrem na intersecção dos domínios de seus representantes, e as classes $[f + g]$ e $[f \cdot g]$ independem da representação tomada. O elemento neutro e a unidade são os germes representados pelas funções nula e a função constante igual a 1, que denotaremos apenas por 0 e 1, respectivamente.

Proposição 4.1. Um elemento $f \in \varepsilon_n$ é invertível se, e somente se, $f(0) \neq 0$.

Demonstração. (\Rightarrow): Se f é invertível, então existe $g \in \varepsilon_n$ tal que

$$f \cdot g = 1.$$

Em particular, avaliando na origem, temos que

$$1 = (f \cdot g)(0) = f(0) \cdot g(0),$$

de onde segue que $f(0) \neq 0$.

(\Leftarrow): Se temos $f(0) \neq 0$, como f é contínua, então, pelo Teorema da Conservação do Sinal, existe uma vizinhança U de 0 em \mathbb{R}^n tal que $f(x) \neq 0$, para todo $x \in U$. Logo, considere g como o germe da aplicação $g: U \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$g(x) := \frac{1}{f(x)},$$

que é uma função suave, pois f não se anula em U . Assim, $g \in \mathcal{E}_n$ e $f \cdot g = 1$. Portanto, f é invertível. □

Proposição 4.2. *O anel \mathcal{E}_n é um anel local, com o seu ideal maximal dado por*

$$\mathfrak{m}_n := \{f \in \mathcal{E}_n \mid f(0) = 0\}.$$

Demonstração. Primeiramente, notemos que $\mathfrak{m}_n \neq \emptyset$, pois o germe nulo está neste conjunto.

Vamos provar que \mathfrak{m}_n é um ideal de \mathcal{E}_n . Sejam $f_1, f_2 \in \mathfrak{m}_n$ e $g \in \mathcal{E}_n$ dados. Então

$$(f_1 + f_2)(0) = f_1(0) + f_2(0) = 0 + 0 = 0$$

e

$$(g \cdot f_1)(0) = g(0) \cdot f_1(0) = g(0) \cdot 0 = 0.$$

Portanto, $f_1 + f_2, f \cdot f_1 \in \mathfrak{m}_n$. Portanto, \mathfrak{m}_n é um ideal de \mathcal{E}_n .

Agora, vamos provar que \mathfrak{m}_n é um ideal maximal de \mathcal{E}_n . Observe que $\mathfrak{m}_n \neq \mathcal{E}_n$, pois $1 \notin \mathfrak{m}_n$. Suponha que I seja um ideal de \mathcal{E}_n , tal que $\mathfrak{m}_n \subsetneq I$. Neste caso temos que existe $f \in I$ tal que $f \notin \mathfrak{m}_n$. Logo, da Proposição anterior temos que f é invertível. Ou seja, existe $g \in \mathcal{E}_n$ tal que $f \cdot g = 1$. Vamos provar que $I = \mathcal{E}_n$. Tome $h \in \mathcal{E}_n$. Então

$$h = 1 \cdot h = (f \cdot g) \cdot h = \underbrace{(g \cdot h)}_{\in \mathcal{E}_n} \cdot \underbrace{f}_{\in I} \in I.$$

Portanto, $I = \mathcal{E}_n$ e \mathfrak{m}_n é um ideal maximal de \mathcal{E}_n .

Por fim, vamos provar que \mathfrak{m}_n é o único ideal maximal de ε_n . Seja J um ideal maximal de ε_n . Observe que $J \subseteq \mathfrak{m}_n$, pois se existisse $f \in J$ tal que $f \notin \mathfrak{m}_n$, viria que $f(0) \neq 0$, de onde seguiria da Proposição anterior que f é invertível e, conseqüentemente, $J = \varepsilon_n$, um absurdo com o fato de J ser maximal. Assim, $J \subseteq \mathfrak{m}_n$, e como J é maximal, com $\mathfrak{m}_n \neq \varepsilon_n$, vem da maximalidade de J que $J = \mathfrak{m}_n$.

Portanto, ε_n é um anel local e \mathfrak{m}_n é o seu único ideal maximal. \square

Lema 4.1 (Lema de Hadamard). *Sejam U uma vizinhança convexa de 0 em \mathbb{R}^n e $f: U \times \mathbb{R}^q \rightarrow \mathbb{R}$ uma função suave. Se $f(0, y) = 0$, para todo $y \in \mathbb{R}^q$, então existem funções suaves f_1, \dots, f_n tais que*

$$f = x_1 \cdot f_1 + x_2 \cdot f_2 + \dots + x_n \cdot f_n.$$

Demonstração. Tome $x = (x_1, \dots, x_n) \in U$ e $y = (y_1, \dots, y_q) \in \mathbb{R}^q$. Como $0, x \in U$ e U é um subconjunto convexo de \mathbb{R}^n , então $\gamma: [0, 1] \rightarrow U \times \mathbb{R}^q$, dada por

$$\gamma(t) := (tx_1, \dots, tx_n, y_1, \dots, y_q),$$

está bem definida. Observe que, pelo Teorema Fundamental do Cálculo, vale

$$\int_0^1 (f \circ \gamma)'(t) dt = (f \circ \gamma)(1) - (f \circ \gamma)(0) = f(x, y) - f(0, y) = f(x, y).$$

Por outro lado, pela Regra da Cadeia, vale

$$\begin{aligned} \int_0^1 (f \circ \gamma)'(t) dt &= \int_0^1 \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(\gamma(t)) \cdot \gamma'_i(t) + \sum_{i=1}^q \frac{\partial f}{\partial y_i}(\gamma(t)) \cdot \gamma'_{n+i}(t) dt \\ &= \sum_{i=1}^n \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x_i}(\gamma(t)) \cdot x_i dt \\ &= \sum_{i=1}^n x_i \cdot \underbrace{\int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x_i}(\gamma(t)) dt}_{:=f_i} \\ &= x_1 \cdot f_1 + x_2 \cdot f_2 + \dots + x_n \cdot f_n, \end{aligned}$$

com f_1, f_2, \dots, f_n funções suaves, logo temos

$$f = x_1 \cdot f_1 + x_2 \cdot f_2 + \dots + x_n \cdot f_n.$$

arrumar

\square

Proposição 4.3. *O ideal \mathfrak{m}_n é um ideal finitamente gerado, gerado pelos germes de funções que tem como representante as funções coordenadas x_1, \dots, x_n .*

Demonstração. Primeiramente, note que $\langle x_1, x_2, \dots, x_n \rangle \subseteq \mathfrak{m}_n$. De fato, tome $f \in \langle x_1, x_2, \dots, x_n \rangle$. Então existem $f_1, f_2, \dots, f_n \in \mathcal{E}_n$ tais que

$$f = x_1 \cdot f_1 + x_2 \cdot f_2 + \dots + x_n \cdot f_n.$$

Logo, avaliando em $x = 0$, vem que

$$f(0) = 0 \cdot f_1(0) + 0 \cdot f_2(0) + \dots + 0 \cdot f_n(0) = 0.$$

Assim, $f \in \mathfrak{m}_n$.

Agora seja $f \in \mathfrak{m}_n$ um germe dado.

Considere $F : U \times \mathbb{R}$ dada por $F(x, y) = f(x_1, \dots, x_n)y$, onde $x = (x_1, \dots, x_n)$.

Como $F(0, y) = 0$. Segue do Lema de Hadamard que existem funções suaves F_1, F_2, \dots, F_n tais que

$$F(x, y) = x_1 \cdot F_1(x, y) + x_2 \cdot F_2(x, y) + \dots + x_n \cdot F_n(x, y).$$

Tomando $y = 1$ temos

$$f(x) = x_1 \cdot F_1(x, 1) + x_2 \cdot F_2(x, 1) + \dots + x_n \cdot F_n(x, 1).$$

Denotando $F_i(x, 1) = f_i(x)$ e tomando o germe na origem temos

$$f = x_1 \cdot f_1 + x_2 \cdot f_2 + \dots + x_n \cdot f_n$$

em \mathcal{E}_n , provando que $f \in \langle x_1, x_2, \dots, x_n \rangle$.

Portanto, $\mathfrak{m}_n = \langle x_1, x_2, \dots, x_n \rangle$. □

Proposição 4.4. *Defina o conjunto*

$$\mathcal{F}_k := \{f \in \mathcal{E}_n \mid j^{k-1} f(0) = 0\}.$$

Então $\mathcal{F}_k = \mathfrak{m}_n^k$.

Demonstração. Vamos provar que $\mathfrak{m}_n^k \subseteq \mathcal{F}_k$. Pela Proposição anterior, temos que \mathfrak{m}_n é gerado por x_1, x_2, \dots, x_n . Logo, \mathfrak{m}_n^k é gerado por

$$\{x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \cdots x_n^{\alpha_n} \mid \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n = k\}.$$

Seja $f \in \mathfrak{m}_n^k$ dado. Então

$$f = \sum_i f_i \cdot x_1^{\alpha_{i1}} \cdot x_2^{\alpha_{i2}} \cdots x_n^{\alpha_{in}}.$$

Sendo $\alpha_{i1} + \cdots + \alpha_{in} = k$, então todas as derivadas de f de ordem menor do que k na origem são nulas, ou seja, $f \in \mathcal{F}_k$.

Agora vamos provar a inclusão contrária por indução sobre k . Para $k = 1$, temos que

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_1 &= \{f \in \varepsilon_n \mid j^0 f(0) = 0\} \\ &= \{f \in \varepsilon_n \mid f(0) = 0\} \\ &= \mathfrak{m}_n \\ &= \mathfrak{m}_n^1. \end{aligned}$$

Seja $k > 1$, suponha a afirmação válida para k , isto é, $\mathcal{F}_k = \mathfrak{m}_n^k$, e vamos provar para $k + 1$. Tome $f \in \mathcal{F}_{k+1}$ dado. Então $j^k f(0) = 0$ e, em particular, $f(0) = 0$. Segue do Lema de Hadamard que existem germes f_1, \dots, f_n tais que

$$f = x_1 \cdot f_1 + \cdots + x_n \cdot f_n,$$

e, como na demonstração do Lema de Hadamard, cada f_i é representada por

$$f_i(x) = \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x_i}(tx) dt.$$

Logo, observe que

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x) = \int_0^1 \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(tx) t dt, \quad \frac{\partial^2 f_i}{\partial x_i \partial x_j}(x) = \int_0^1 \frac{\partial^3 f}{\partial x_i \partial x_j \partial x_i}(tx) t^2 dt,$$

ou seja,

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(0) = \int_0^1 \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(0) t dt = 0, \quad \frac{\partial^2 f_i}{\partial x_i \partial x_j}(0) = \int_0^1 \frac{\partial^3 f}{\partial x_i \partial x_j \partial x_i}(0) t^2 dt = 0,$$

e assim por diante. Como $f \in \mathcal{F}_{k+1}$, então as derivadas de até ordem k de f na origem se anulam. Então as derivadas de até ordem $k - 1$ de f_i na origem se anulam, isto é, $f_i \in \mathcal{F}_k$. Segue da hipótese de indução que $f_i \in \mathfrak{m}_n^k$, logo,

$$x_i f_i \in \mathfrak{m}_n \cdot \mathfrak{m}_n^k = \mathfrak{m}_n^{k+1},$$

e como \mathfrak{m}_n^{k+1} é um ideal de ε_n , então

$$f = x_1 \cdot f_1 + \cdots + x_n \cdot f_n \in \mathfrak{m}_n^{k+1}.$$

Portanto, pelo Princípio de Indução Finita, segue que $\mathcal{F}_k = \mathfrak{m}_n^{k+1}$, para todo $k \geq 1$. \square

Vamos agora relacionar os germes do espaço ε_n com as suas séries de Taylor em torno da origem, que estão naturalmente inseridas no espaço das séries formais $\mathbb{R}[[x_1, \dots, x_n]]$, denotado por $\widehat{\varepsilon}_n$.

Definição 4.11. Seja A um anel comutativo com unidade. Um A -módulo é um grupo abeliano (escrito aditivamente) sobre o qual A atua linearmente. De maneira mais precisa, é um par (M, μ) , onde M é um grupo abeliano e

$$\mu: A \times M \rightarrow M,$$

que vamos denotar $\mu(a, x)$ por $a \cdot x$, satisfazendo

1. $a \cdot (x + y) = a \cdot x + a \cdot y$;
2. $(a + b) \cdot x = a \cdot x + b \cdot x$;
3. $(ab) \cdot x = a \cdot (b \cdot x)$;
4. $1 \cdot x = x$,

para todo $a, b \in A$ e $x, y \in M$.

Alguns exemplos notáveis incluem o grupo abeliano $\varepsilon_{n,p}$, que é um ε_n -módulo. Sua multiplicação é definida como

$$g \cdot (f_1, f_2, \dots, f_p) := (gf_1, gf_2, \dots, gf_p).$$

Além disso, todo ideal I de um anel A funciona como um A -módulo. Quando A é equivalente a um corpo \mathbb{K} , todos os A -módulos se tornam \mathbb{K} -espaços vetoriais

Definição 4.12. Sejam A um anel e M um A -módulo. Um A -submódulo de M é um subgrupo N de M que é fechado em relação à multiplicação por elementos de A , isto é,

$$ax + by \in N,$$

para todo $a, b \in A$ e $x, y \in N$.

Lema 4.2 (Lema de Nakayama). *Sejam R um anel comutativo com unidade e \mathfrak{m} um ideal de R com a propriedade de que $1 + x$ é invertível em R , para todo $x \in \mathfrak{m}$, M um R -módulo e A, B dois R -submódulos de M , com A finitamente gerado. Se*

$$A \subseteq B + \mathfrak{m}A,$$

então $A \subseteq B$.

Demonstração. Como por hipótese temos que A é finitamente gerado, podemos então escrever $A = \langle a_1, a_2, \dots, a_t \rangle$. Como $A \subseteq B + \mathfrak{m}A$, então para cada índice $i \in \{1, 2, \dots, t\}$, existem $b_i \in B$ e $\lambda_{ij} \in \mathfrak{m}$, com $j = 1, 2, \dots, t$, tais que

$$a_i = b_i + \sum_{j=1}^t \lambda_{ij} a_j.$$

Considerando as matrizes

$$a = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_t \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_t \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} & \dots & \lambda_{1t} \\ \lambda_{21} & \lambda_{22} & \dots & \lambda_{2t} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_{t1} & \lambda_{t2} & \dots & \lambda_{tt} \end{bmatrix},$$

podemos escrever as t igualdades iniciais como $a = b + \Lambda a$, ou seja,

$$(I - \Lambda)a = b.$$

Observe que a matriz $I - \Lambda$ é invertível, pois o seu determinante é

$$\begin{vmatrix} 1 - \lambda_{11} & -\lambda_{12} & \dots & -\lambda_{1t} \\ -\lambda_{21} & 1 - \lambda_{22} & \dots & -\lambda_{2t} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\lambda_{t1} & -\lambda_{t2} & \dots & 1 - \lambda_{tt} \end{vmatrix} = 1 + x,$$

para algum $x \in \mathfrak{m}$, e $1+x$ é invertível, por hipótese. Portanto, multiplicando a igualdade acima por $(I-\Lambda)^{-1}$, temos

$$a = (I - \Lambda)^{-1}b,$$

isto é, $a_i \in B$, para todo $i = 1, 2, \dots, t$ e, portanto, $A \subseteq B$. \square

Exemplo 4.3. Considere $R = \mathcal{E}_2$, $M = \mathcal{E}_2$ e os R -submódulos $A = \langle x^2, y^2 \rangle$, $B = \langle x^2 + y^3, x^3 + y^2 \rangle$. Observe que $B \subseteq A$, pois

$$\begin{cases} x^2 + y^3 = x^2 + y \cdot y^2 \in A, \\ x^3 + y^2 = x \cdot x^2 + y^2 \in A. \end{cases}$$

Não é claro que vale a inclusão contrária, mas aplicando o Lema da Nakayama, podemos provar isto. Para isto, basta provar que

$$A \subseteq B + \mathfrak{m}_2 \cdot A.$$

Observe que

$$\mathfrak{m}_2 \cdot A = \langle x, y \rangle \cdot \langle x^2, y^2 \rangle = \langle x^3, xy^2, x^2y, y^3 \rangle.$$

Então

$$\begin{cases} x^2 = \underbrace{(x^2 + y^3)}_{\in B} - \underbrace{y^3}_{\in \mathfrak{m}_2 \cdot A} \in B + \mathfrak{m}_2 \cdot A, \\ y^2 = \underbrace{(x^3 + y^2)}_{\in B} - \underbrace{x^3}_{\in \mathfrak{m}_2 \cdot A} \in B + \mathfrak{m}_2 \cdot A. \end{cases}$$

Assim, $A \subseteq B + \mathfrak{m}_2 \cdot A$ e, pelo Lema de Nakayama, vale $A \subseteq B$. Portanto, $A = B$.

Definição 4.13. Seja M uma \mathbb{R} -álgebra. Um ideal I de M tem **codimensão finita em M** se o espaço quociente M/I tem dimensão finita como espaço vetorial sobre \mathbb{R} . A codimensão de I é definida como a dimensão

$$\dim_{\mathbb{R}} \left(\frac{M}{I} \right).$$

Agora, considere o germe $f \in \mathcal{E}_n$, seja \hat{f} a sua série de MacLaurin, ou seja, a sua série de Taylor em torno de origem. Podemos definir a seguinte aplicação entre \mathcal{E}_n e a álgebra $\mathbb{R}[[x_1, \dots, x_n]]$, que é o anel das séries formais nas variáveis x_1, \dots, x_n :

$$\begin{aligned} \phi: \mathcal{E}_n &\rightarrow \mathbb{R}[[x_1, \dots, x_n]] (= \hat{\mathcal{E}}_n) \\ f &\mapsto s_M(f), \end{aligned}$$

onde $s_M(f)$ denota a série de MacLaurin de f .

Lema 4.3 (Lema de Borel). *O homomorfismo de \mathbb{R} -álgebras ϕ definido acima é um morfismo sobrejetor.*

Demonstração. O ponto de partida é construir uma função suave com propriedades importantes. Mais precisamente, vamos provar a seguinte afirmação:

Afirmação: Existe uma função suave $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $g(t) = t$ para $|t| \leq \frac{1}{2}$ e $g(t) = 0$ para $|t| \geq 1$.

De fato, conseguimos uma função $\theta: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ com $0 \leq \theta(t) \leq 1$ para todo t , além disso, $\theta(t) = 0$ para $t \leq 0$. Essa função é definida por:

$$\theta(t) = \begin{cases} 0, & \text{quando } t \leq 0; \\ e^{-\frac{1}{t^2}}, & \text{quando } t > 0. \end{cases}$$

A função que desejamos g é obtida quando definimos por

$$g(t) := \frac{t\theta(1-t^2)}{\theta(1-t^2)\theta(t^2 + \frac{1}{4})}.$$

Agora, vamos voltar a demonstração do Lema. Vamos adotar a seguinte notação. Dados uma sequência $x = (x_1, \dots, x_n)$ de números reais, e uma sequência $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ de inteiros não negativos, escrevemos x^α como uma abreviação para $x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n}$. Queremos mostrar que dado um elemento $\hat{f} = \sum \hat{f}_\alpha x^\alpha$ em $\hat{\mathcal{E}}_n$ existe um elemento f em \mathcal{E}_n tal que \hat{f} é a série de Taylor de f relativo as coordenadas x_1, \dots, x_n , isto é, $\hat{f}_\alpha = \frac{1}{\alpha!} D^\alpha f(0)$ para toda escolha de α , onde escrevemos $\alpha! = \alpha_1! \dots \alpha_n!$, $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$ e

$$D^\alpha f = \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}.$$

Para isso, considere a função suave $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ como as propriedades da afirmação anterior e tome $\tilde{g}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ a função suave definida por $\tilde{g}(x_1, \dots, x_n) := (g(x_1), \dots, g(x_n))$. Consideramos uma sequência arbitrária ε_k de números reais com $0 < \varepsilon_k < 1$ tais que $\lim_{k \rightarrow +\infty} \varepsilon_k = 0$, e a função correspondente

$$f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R},$$

definida por $f(x) := \sum_{k=0}^{+\infty} f_k(x)$, onde $f_k(x) := \sum_{|\alpha|=k} \varepsilon_k^k \hat{f}_\alpha \tilde{g}(\frac{x}{\varepsilon_k})^\alpha$.

Note primeiro que f é bem definida, uma vez que dado x apenas um número finito de termos $f_k(x)$ são não nulos. Note também que $f_k(x) = \sum_{|\alpha|=k} \widehat{f}_\alpha x^\alpha$ próximo da origem, e temos que:

$$D^\alpha f_k(0) = \begin{cases} 0, & \text{se } k \neq |\alpha|; \\ \alpha! \widehat{f}_\alpha, & \text{se } k = |\alpha|. \end{cases}$$

Afirmamos que é possível escolher uma sequência (ε_k) de maneira que, em alguma vizinhança de 0 em \mathbb{R}^n , a série $\sum_{k=0}^{\infty} D^\alpha f_k$ converge uniformemente para qualquer escolha de α . Então, segue dos teoremas de cálculo que a função f é suave, e que

$$D^\alpha f(0) = \sum_{k=0}^{\infty} D^\alpha f_k(0) = \alpha! \widehat{f}_\alpha.$$

Assim como queríamos. Pelo teste da comparação é suficiente escolher (ε_k) de modo que $\sum_{k=0}^{\infty} \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |D^\alpha f_k|$ seja dominada por uma série (envolvendo α) que é convergente para qualquer α . Claramente, precisamos produzir um limite superior em $D^\alpha f_k$. Antes de tudo, note que (por diferenciação) nós temos:

$$D^\alpha f_k(x) = \sum_{|\beta|=k} \varepsilon_k^{k-|\alpha|} \widehat{f}_\beta \psi(\alpha, \beta, k, x),$$

onde

$$\psi(\alpha, \beta, k, x) = \prod_{j=1}^n \frac{\partial_j^\alpha g^{\beta_j}}{\partial x_j^{\alpha_j}} \left(\frac{x_j}{\varepsilon_k} \right).$$

Como a função g é nula fora de um conjunto compacto nós temos um limitante bem definido:

$$B(\alpha, \beta, k) = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |\psi(\alpha, \beta, k, x)|.$$

Então, definindo $B(\alpha, k) = \sum_{|\beta|=k} \widehat{f}_\beta B(\alpha, \beta, k)$. Nós vemos que

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^n} |D^\alpha f_k| \leq \varepsilon_k^{k-|\alpha|} B(\alpha, k)$$

e, portanto, que a série $\sum_{k=0}^{\infty} \sup |D^\alpha f_k|$ é dominada por $\sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon_k B(\alpha, k)$. Tudo que precisamos fazer agora é escolher uma sequência (ε_k) tal que a última série converge para todas as escolhas de α , e isso pode ser feito escolhendo ε_k de modo que $\frac{1}{\varepsilon_k} > 2^k \sum_{|\alpha| \leq k} B(\alpha, k)$. \square

Observação 4.3. Note que

$$\text{Ker}(\phi) = \{f \in \varepsilon_n \mid s_M(f) = 0\}.$$

Logo, se $f \in \text{Ker}(\phi)$, então $f \in \mathfrak{m}_n^k$, para todo $k \in \mathbb{Z}$, com $k \geq 1$, ou seja, $f \in \bigcap_{k=1}^{\infty} \mathfrak{m}_n^k$.

Denotamos o ideal $\bigcap_{k=1}^{\infty} \mathfrak{m}_n^k$ por $\mathfrak{m}_n^{\infty} :=$.

Definição 4.14. O ideal \mathfrak{m}_n^{∞} é chamado de **ideal dos germes de funções flats, funções planas ou funções chatas**.

Observação 4.4. O ideal \mathfrak{m}_n^{∞} não é trivial, ou seja, $\mathfrak{m}_n^{\infty} \neq \{0\}$ e $\mathfrak{m}_n^{\infty} \neq \varepsilon_n$. De fato, temos que $\mathfrak{m}_n^{\infty} \neq \varepsilon_n$, pois $x_1 \notin \mathfrak{m}_n$. Agora, para provar que $\mathfrak{m}_n^{\infty} \neq \{0\}$, considere $n = 1$ e a função

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Neste caso, as derivadas de f em 0 se anulam para todas as ordens, ou seja, $\hat{f} = 0$. Portanto, o germe $f \in \mathfrak{m}_1^{\infty}$.

Deixamos a demonstração de resultado a seguir a cargo do leitor.

Proposição 4.5. *A álgebra ε_n não é um anel Noetheriano.*

Se I for um ideal de ε_n , usando a Definição 4.13 temos quem a **codimensão de I em ε_n** é dada por

$$\dim_{\mathbb{R}} \left(\frac{\varepsilon_n}{I} \right).$$

Denotaremos esse número inteiro, maior ou igual a zero, por $\text{Cod}(I)$.

Proposição 4.6. *Seja I um ideal de ε_n . Então $\text{Cod}(I)$ é finito ($\text{Cod}(I) < \infty$) se, e somente se, existe $k \in \mathbb{Z}$, com $k \geq 1$, tal que $\mathfrak{m}_n^k \subseteq I$.*

Demonstração. (\Leftarrow) Existe um inteiro $k \geq 1$ tal que $\mathfrak{m}_n^k \subseteq I$. Então $\varepsilon_n/I \subseteq \varepsilon_n/\mathfrak{m}_n^k$ e, assim, $\dim(\varepsilon_n/I) \leq \dim(\varepsilon_n/\mathfrak{m}_n^k)$. Temos que

$$\varepsilon_n/\mathfrak{m}_n^k \cong \mathbb{R}\{\text{monômios de grau menor do que } k\}$$

tem dimensão finita. Portanto \mathcal{E}_n/I tem dimensão finita.

(\Rightarrow) Podemos escrever a sequência:

$$I + \mathfrak{m}_n \supseteq I + \mathfrak{m}_n^2 \supseteq I + \mathfrak{m}_n^3 \supseteq \dots \supseteq I + \mathfrak{m}_n^k \supseteq \dots$$

e conseqüentemente:

$$\mathcal{E}_n/(I + \mathfrak{m}_n) \subseteq \mathcal{E}_n/(I + \mathfrak{m}_n^2) \subseteq \dots \subseteq \mathcal{E}_n/(I + \mathfrak{m}_n^k) \subseteq \dots$$

Como a codimensão de I é finita existe $k \geq 1$ tal que $I + \mathfrak{m}_n^k = I + \mathfrak{m}_n^{k+1}$ e como \mathfrak{m}_n^k é finitamente gerado, podemos aplicar o Lema de Nakayama para concluir que $\mathfrak{m}_n^k \subseteq I$. \square

Exemplo 4.4. Considere o ideal $I = \langle x^2 + y^3, y^2 + x^3 \rangle \subseteq \mathcal{E}_2$. Vamos calcular $\text{cod}(I)$. Primeiramente, vamos mostrar que $I = \langle x^2, y^2 \rangle$. Seja $J := \langle x^2, y^2 \rangle$. Então

$$\mathfrak{m}_2 J = \langle x, y \rangle \langle x^2, y^2 \rangle = \langle x^3, x^2 y, x y^2, y^3 \rangle = \mathfrak{m}_2^3.$$

Então

$$\begin{aligned} x^2 &= \underbrace{(x^2 + y^3)}_{\in I} - \underbrace{y^3}_{\in \mathfrak{m}_2 J} \\ y^2 &= \underbrace{(y^2 + x^3)}_{\in I} - \underbrace{x^3}_{\in \mathfrak{m}_2 J}, \end{aligned}$$

assim, $J \subseteq I + \mathfrak{m}_2 J$. Segue do Lema de Nakayama que $J \subseteq I$, ou seja,

$$\langle x^2, y^2 \rangle \subseteq \langle x^2 + y^3, y^2 + x^3 \rangle.$$

Sendo a inclusão contrária imediata, temos que

$$\langle x^2 + y^3, y^2 + x^3 \rangle = \langle x^2, y^2 \rangle.$$

Logo,

$$\text{Cod}(\langle x^2 + y^3, y^2 + x^3 \rangle) = \text{Cod}(\langle x^2, y^2 \rangle) = \dim_{\mathbb{R}} \left(\frac{\mathcal{E}_2}{\langle x^2, y^2 \rangle} \right).$$

Como $\mathfrak{m}_2^3 \subseteq \langle x^2, y^2 \rangle$, então

$$\frac{\mathcal{E}_2}{\langle x^2, y^2 \rangle} = \frac{\mathcal{E}_2}{\langle x^2, y^2 \rangle + \mathfrak{m}_2^3} \cong \mathbb{R}\{1, x, y, xy\}.$$

Portanto, $\text{Cod}(\langle x^2 + y^3, y^2 + x^3 \rangle) = 4$.

Definição 4.15. Seja $f \in \varepsilon_n$. Definimos o **ideal jacobiano de f** como

$$\left\langle \frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right\rangle,$$

o ideal gerado pelas derivadas parciais de f . Denotaremos esse ideal como Jf .

Definiremos algo o Número de Milnor, invariante de grande destaque na Teoria de Singularidades, com várias interpretações em vários contextos distintos.

Definição 4.16. Seja $f \in \varepsilon_n$. Definimos o **número de Milnor de f** como sendo

$$\mu(f) := \text{Cod}(Jf) = \dim_{\mathbb{R}} \left(\frac{\varepsilon_n}{Jf} \right).$$